Title	岩澤理論入門(代数的整数論とその周辺)
Author(s)	中島, 匠一
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1026: 28-42
Issue Date	1998-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/61772
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1026 巻 1998 年 28-42

岩澤理論入門

東京大学 大学院 数理科学研究科
中島匠一 (Shōichi NAKAJIMA)

1 Introduction

表題にある通り，本稿の目的はあくまでも岩澤理論への「入門」なので，内容は必然的に非専門化向けの話という事になる．具体的には，岩澤理論についてすこしは聞いたことはあるし興味はあるがちゃんと勉強してないので詳しいことはわからない，というような方を対象に，岩澤理論の基本的枠組みについて述べてみたい．(代数学や代数的整数論の基本的知識は仮定せざるをえない．)

ここでまず問題になるのが，岩澤理論，といったときどの範囲を指すのか，ということである．現在では，非常に多くの対象に対して「岩澤理論」が考えられているし，研究の手法も多岐に渡っているからである．広い意味で岩澤理論の範疇に入るものすべてについて概観することは,「入門」には相応しくないだろうし，筆者のよくするところでもない．本稿では最新の成果について述べることは避けて，岩澤理論の原点に帰り,「代数体の円分 $\mathbf{Z}_p$拡大」に絞って話をすることとした．また，その中でも代表的な成果である，岩澤類数公式と岩澤主予想の解説を目標とした．

2 節では我々の扱う状況を設定して，重要な環 Λを導入する．3 節で Λ加群の構造について概説した．4 節で代表的成果である岩澤類数公式を解説し，7 節ではハイライトともいうべき岩澤主予想を扱った．岩澤理論の進展の背後には，代数体と代数関数体 (代数曲線) との類似，という「動機」があると考えられるし，またその類似を知ることは読者の理解の助けにもなると思われるので，5 節においてその類似について触れた．6 節では主予想の片方の主役である p 進 L 関数について必要なことをまとめてある．

Λ加群の構造定理は代数体の岩澤理論に限らずその一般化に関しても不可欠の道具だと考えたので，3 節がすこし長くなってしまった．岩澤理論とはどんなものでそもそもどんな成果があるのか，ということをまず知りたい読者は，2 節で状況を理解した後 (3 節を飛ばして)4 節を読んで頂きたい．

Introduction の最後に，文献について触れておきたい．岩澤理論を本格的に学ぶためには，もちろん岩澤先生の原論文に接するのが最も望ましいであろう．論文は数多くあるが，[Iw 2] , [Iw 3] などを読むのが良いのではない

かと思う．その他に岩澤理論の教科書を挙げるとすれば，Lang の本 [La] と Washington の本 [Wa] が代表的なものといえよう．本稿で述べた命題に関しては，極力 [Wa] での対応箇所を指摘するようにした．岩澤理論の教科書といえるものが日本語で出版されていないのが(筆者には)不満であったが，最近，市村文男氏の講義録 [Ichi] が出た．この本は薄いものであり，理論のすべてをカバーしているわけではないが，類体論の概要から始めて代数体の岩澤理論のエッセンスがうまくまとめられている．

また，岩澤理論の発生と進展，代数体と代数関数体との類似に関する考え方，について興味を持たれる読者には [Iw 1]，[Iw 4] を読むことをお勧めする．

2 基本的設定

本稿を通じて，素数 p を一つ固定して考える．p 進整数環，p 進数体を各々 $\mathbf{Z}_p$，$\mathbf{Q}_p$ で表す事にする．また，これも標準的記号であるが，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{C}$で，整数環，有理数体，複素数体を表す．

まず，円分 $\mathbf{Z}_p$拡大の定義から始めよう．$p=2$ の場合にもちゃんと理論は存在するのであるが，扱いが少し複雑になる.「入門」という事で，以下では p は奇素数であると仮定しておく．$p=2$ の場合どこを変更すべきであるかは各自学習していただきたい．

$\mu_{p^{n+1}}=\{\zeta\in\mathbf{C}\mid\zeta^{p^{n+1}}=1\}$ を 1 の p^{n+1} 乗根の群とし，p^{n+1} 分体 $\mathbf{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ を考える．ガロア群について

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^{n+1}})/\mathbf{Q})\cong(\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z})^{\times}\cong(\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z})\times(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

が成り立つので，$\mathbf{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ の部分体 $\mathbf{B}_n$ で $\mathrm{Gal}(\mathbf{B}_n/\mathbf{Q})=\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ をみたすものがただひとつ存在する．$n\geq 1$ に対する全ての $\mathbf{B}_n$ の合成体を $\mathbf{B}_\infty=\cup_{n=1}^{\infty}\mathbf{B}_n$ とおく．$\mathbf{B}_\infty$ は $\mathbf{Q}$の無限次ガロア拡大で，$\mathrm{Gal}(\mathbf{B}_\infty/\mathbf{Q})=\varprojlim_n(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}_p$ である事がわかる．

有限次代数体 K に対し，K と $\mathbf{B}_\infty$ の合成体を K_∞ とおく: $K_\infty=K\mathbf{B}_\infty$. $\Gamma=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ は $\mathbf{Z}_p$の指数有限部分群であるが，それはまた $\mathbf{Z}_p$に同型である．この K_∞ が K の円分 $\mathbf{Z}_p$拡大 (cyclotomic $\mathbf{Z}_p$extension) と呼ばれるものである．(基本 $\mathbf{Z}_p$拡大 (basic $\mathbf{Z}_p$extension) ともいう．) $\mathbf{B}_\infty$ 自体が $\mathbf{Q}$の円分 $\mathbf{Z}_p$拡大である．$\mu_p\subset K$ であれば $K_\infty=\cup_{n=1}^{\infty}K(\mu_{p^n})$ となることから「円分」という言葉が使われるわけである．Γ_n を $(\Gamma:\Gamma_n)=p^n$ をみたす Γ の(唯一つの)部分群とし，K_n を Γ_n の固定体とする．$\mathrm{Gal}(K_n/K)=\Gamma/\Gamma_n\cong\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ であり，$m\geq n$ ならば K_n は K_m の部分体である．

C_n を 代数体 K_n のイデアル類群とし，A_n を C_n の p 部分 (Sylow p 部分群) とする．A_n は有限アーベル p 群であるから $\mathbf{Z}_p$加群である．更にガロ

ア群 $\mathrm{Gal}(K_n/K) = \Gamma/\Gamma_n$ が A_n に作用しているので, A_n は $\mathbf{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$ 加群となる ($\mathbf{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$ は Γ/Γ_n の $\mathbf{Z}_p$上の群環).

岩澤理論においては, 個々の n について A_n を考えるのではなく, 全ての自然数 n に対して A_n を一斉に考えることが重要である. 具体的には, 次のような対象を扱う事になる: $m \geq n$ に対して代数体のノルム写像 $N_{m,n} : K_m \to K_n$ から引き起こされる自然な写像 $A_m \to A_n$ によって $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ は射影系をなす (また, この写像はガロア群の作用とも compatible である). その射影極限 $X = \varprojlim_n A_n$ は $\varprojlim_n \mathbf{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$ 加群となる. ここで, $\varprojlim_n \mathbf{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$ は自然な準同型 $\Gamma/\Gamma_m \to \Gamma/\Gamma_n\,(m \geq n)$ から定まる群環の射影極限であるが, これを $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ と書いて Γ の ($\mathbf{Z}_p$上の) 完備群環という. 全ての自然数 n に対して A_n を一斉に考えるという思想は, $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ 加群 X を考察する, という形で具体化される.

岩澤理論には, 上の X という加群以外にも多くの重要な $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ 加群が登場する. しかし本稿では,「入門」という目的から, 扱う対象は加群 X に限定し, いかにして岩澤類数公式や岩澤主予想が出てくるかを解説する事とした. また, 類体論を通じて, X をあるガロア群として理解することができるがそれについては後述する.

上で導入された完備群環 $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ であるが, それはもう少しわかりやすい環, $\mathbf{Z}_p$上の一変数形式ベキ級数環 $\mathbf{Z}_p[[T]]$, に同型である事が Serre により指摘された. これは重要な事であるので, きちんと述べておこう. 標準的な記号であるので, $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[T]]$ と書くことにする. Λは 2 次元の位相環で, p と T で生成される極大イデアル (p, T) から定まる位相について完備である. 次の定理が成り立つ ([Wa, Theorem 7.1]).

定理 2.1 γ_0 を Γ の位相的生成元とする. このとき, $\gamma_0 \in \Gamma$ に $1 + T \in \Lambda$ を対応させる事によって, $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ と Λは *(*位相環として*)* 同型である.

上で「位相的生成元」といっている意味は, γ_0 が生成する巡回群の Γ の中での閉包が Γ に一致する, という事である. Γ の位相的生成元 γ_0 の標準的選び方, というのは特にない訳であるが, とにかく, γ_0 を一つ固定しておけば, $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ 加群の考察は Λ加群の考察に帰着される事になる.

この定理の詳しい証明は [Wa, §7.1] を見て頂くことにするが, 同型の作り方について簡単に触れておこう. $\Gamma/\Gamma_n \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \cong U/U^{p^n}$ (ここで, $U = 1 + p\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Z}_p \mid x \equiv 1 \pmod p\}$) であることから, $\mathbf{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n] \cong \mathbf{Z}_p[T]/\omega_n(T) \quad (\omega_n(T) = (1+T)^{p^n} - 1)$ となる. これから, 射影極限を取り, $\Lambda \cong \varprojlim_n \mathbf{Z}_p[T]/(\omega_n(T))$ を確かめれば定理が得られる.

3　Λ加群

この節では，Λの構造とΛ加群の構造についてまとめる．この節の内容は整数論とは独立であって，Λに関する代数的考察で得られるものばかりであるが，岩澤理論においては基本的な役割を果す．次の4節において，代数体の岩澤理論への応用を述べる．

4節に登場するのはΛ加群だけであるが，5節で p 進 L 関数について述べるときのためにすこし一般的に述べておきたい．k を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体とし，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_k$ をその整数環とする．$\Lambda_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}[[T]]\cong\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathcal{O}$ とおき，$\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の構造について考察する．$k=\mathbf{Q}_p$ のときは $\mathcal{O}=\mathbf{Z}_p$ で，$\Lambda_{\mathcal{O}}=\Lambda_{\mathbf{Z}_p}=\Lambda$ である．

以下，次の記号を使う．$\mathcal{O}$の素元 π を一つ取り，これを固定しておく．π の生成する $\mathcal{O}$のイデアル (π) は $\mathcal{O}$の極大イデアルであるが，その剰余体を F とする: $F=\mathcal{O}/(\pi)$.

3.1　$\Lambda_{\mathcal{O}}$の元とイデアル

$$f(T)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kT^k=a_0+a_1T+a_2T+\cdots$$

を $\Lambda_{\mathcal{O}}$の元とする．

定義 3.1 $f(T)\neq 0$ とする時，$f(T)$ の μ 不変量 $\mu(f)$ と λ 不変量 $\lambda(f)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \max\{m\geq 0\mid \pi^m\mid a_k \quad \text{for all} \quad k\}\\ \lambda(f) &= \min\{k\geq 0\mid \pi^{\mu(f)+1}\nmid a_k\}\end{aligned}$$

定義から，$\mu(f)\geq 0$ ，$\lambda(f)\geq 0$ である．また，

$$\mu(f)=\lambda(f)=0\Longleftrightarrow a_0\in\mathcal{O}^\times\Longleftrightarrow f(T)\in{\Lambda_{\mathcal{O}}}^\times$$

である事を注意しておこう．

$\Lambda_{\mathcal{O}}$のイデアルについて調べるとき，次の distinguished polynomial の概念が重要になってくる．

定義 3.2 $P(T)\in\mathcal{O}[T]$ が distinguished polynomial であるとは，$P(T)$ がモニックな多項式であり，$P(T)=T^n+b_{n-1}T^{n-1}+\cdots+b_0$ とする時，$\pi\mid b_k\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$ が成立することである．

distinguished polynomial の性質については [Wa, §7.1] などを参照してほしい．

次の命題は p 進 Weierstrass 準備定理と呼ばれ，$\Lambda_{\mathcal{O}}$の性質を調べて行く上で基本的役割を果す ([Wa, Theorem 7.3]).

命題 3.3 $f(T) \in \Lambda_{\mathcal{O}}$, $f(T) \neq 0$ とする.

このとき，整数 $\mu \geq 0$, distinguished polynomial $P_f(T) \in \mathcal{O}[T]$, $U_f(T) \in \Lambda_{\mathcal{O}}{}^{\times}$ が唯一つ定まり，

$$f(T) = \pi^{\mu} P_f(T) U_f(T)$$

が成立する.

またこのとき，$\mu = \mu(f)$, $\deg P_f(T) = \lambda(f)$ である.

$\Lambda_{\mathcal{O}}$の素イデアルは次の様に決定できる ([Wa, Proposition 13.9]).

命題 3.4 $\Lambda_{\mathcal{O}}$の素イデアルは次のいずれかに一致する.

1. $\{0\}$

2. (π)

3. $(P(T))$: $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ は $\mathcal{O}$上既約な distinguished polynomial .

4. (π, T)

各素イデアルによる剰余環の構造について触れておこう.

4. のイデアルは $\Lambda_{\mathcal{O}}$の (唯一の) 極大イデアルで，$\Lambda_{\mathcal{O}}/(\pi, T) \cong F$ (k の剰余体) が成立する.

2. , 3. の素イデアルは共に $\Lambda_{\mathcal{O}}$の高さ 1 の素イデアルであるが，両者の剰余環の構造は大分違っている: $\Lambda_{\mathcal{O}}/(\pi) \cong F[[T]]$ であって，これは F 加群としては F の可算無限個の直積に同型である. $\Lambda_{\mathcal{O}}/(P(T))$ は $\mathcal{O}$加群として $\mathcal{O}^{\lambda}$ ($\lambda = \deg P(T)$) に同型である.

3.2 $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の構造

これから $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の構造について述べる. $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の同型類の分類ができれば完全であろうが，$\Lambda_{\mathcal{O}}$が 2 次元の環であることから，同型類の分類は難しい. しかし，数論的応用に関しては，同型よりも弱い擬同型 (pseudo-isomorphism) による分類で十分有効であることがわかっている.

擬同型の定義を述べておこう ([Wa, §13.2]).

定義 3.5 M, M' を $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群とする. M が M' に擬同型 (pseudo-isomorphic) であるとは，$\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の準同型 $\varphi : M \to M'$ で $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と $\mathrm{Im}(\varphi)$ がともに有限であるものが存在することである. また，このことを，$M \sim M'$ と書き表す.

一般の $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群に関しては，$M \sim M'$ から $M' \sim M$ は導かれないので注意が必要である．(そのような例は，[Wa, §13.2, p.272] に挙げられている．) しかし，有限生成 torsion $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 M, M' に関しては $M \sim M'$ と $M' \sim M$ は同値となる [Wa, §13.2]．よって，有限生成 torsion $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の範囲では，擬同型は同値関係を与えている．

岩澤理論で基本的役割を果す有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の構造定理を述べるために，elementary $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群とその不変量の定義を与えておこう．

定義 3.6 *1.* 次の形の $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 E を elementary $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群と呼ぶ．ただし，r, s, t, m_i, n_j は整数で $r, s, t \geq 0$, $m_i, n_j \geq 1$ であり，$P_j(T) \in \mathcal{O}[T]$ は既約な distinguished polynomial である．

$$E = {\Lambda_{\mathcal{O}}}^r \bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda_{\mathcal{O}}/(\pi^{m_i}) \bigoplus_{j=1}^{t} \Lambda_{\mathcal{O}}/(P_j(T)^{n_j})$$

2. 上の elementary $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 E に対して，その自由階数 (free rank) $\mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathcal{O}}}(E)$，$\mu$ 不変量 $\mu(E)$，λ 不変量 $\lambda(E)$，特性多項式 $\mathrm{char}(E) \in \mathcal{O}[T]$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathcal{O}}}(E) &= r \\
\mu(E) &= \sum_{i=1}^{s} m_i \\
\lambda(E) &= \sum_{j=1}^{t} n_j \\
\mathrm{char}(E) &= \pi^{\mu(E)} \prod_{j=1}^{t} P_j(T)^{n_j}
\end{aligned}$$

一般にはこれらの不変量によって $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 E の構造が一意的に定まるわけではないが，これらが E の重要な性質を反映していることは確かである．$\mu(E) = \mu(\mathrm{char}(E)), \lambda(E) = \lambda(\mathrm{char}(E))$ であることも注意しておこう．

$\Lambda_{\mathcal{O}}$加群について知られている事実をまとめてみよう．以下では，M は $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群を表すとする．

1. M が有限生成であれば，M は自然にコンパクトな $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群の構造を持つ．

2. M をコンパクトな $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群とする．このとき次が成り立つ ([Wa, Lemma 13.16])．

命題 3.7 M は有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群である $\Longleftrightarrow M/(\pi, T)M$ は有限集合である．

3. 有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群について，次の構造定理が成り立つ ([Wa, Theorem 13.12])．これは $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群を考察する上で基本的役割を果す．

命題 3.8 M を有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群とする．このとき，$M \sim E$ をみたす elementary $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 E が唯一つ存在する．

例として，$f(T) \in \Lambda_{\mathcal{O}}$, $f(T) \neq 0$ から定まる加群 $M = \Lambda_{\mathcal{O}}/(f(T))$ を考えてみよう．これ自体は一般には elementary $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群ではないが，その不変量は $f(T)$ から次の様に定まる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathcal{O}}}(\Lambda_{\mathcal{O}}/(f(T))) &= 0 \\
\mu(\Lambda_{\mathcal{O}}/(f(T))) &= \mu(f) \\
\lambda(\Lambda_{\mathcal{O}}/(f(T))) &= \lambda(f) \\
\mathrm{char}(\Lambda_{\mathcal{O}}/(f(T))) &= P_f(T)
\end{aligned}$$

4. 有限生成な M が torsion $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群になるかどうかは次の様に判定できる．

命題 3.9 有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 M について，次の性質は同値である．

(a) M は torsion $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群である．

(b) $\mathrm{rank}_{\Lambda_{\mathcal{O}}}(M) = 0$

(c) $\dim_k M \otimes_{\mathcal{O}} k < \infty$

5. torsion $\Lambda_{\mathcal{O}}$加群 M については次が成り立つ．

   (a) $\lambda(M) = \dim_k M \otimes_{\mathcal{O}} k = \deg \mathrm{char}(M)$

   (b) $\mu(M) = 0 \Longleftrightarrow \dim_F M/\pi M < \infty$ ([Wa, Lemma 13.20])

   (c) $\mu(M) = 0$ であるとき，$\mathrm{char}(M)$ は $M \otimes_{\mathcal{O}} k$ 上への T の作用の特性多項式と一致する．

6. もともとの $\mathcal{O} = \mathbf{Z}_p$ の場合 (このとき，$\Lambda_{\mathcal{O}} = \Lambda$) に，Λ加群への $\omega_n(T) = (1+T)^{p^n} - 1$ の作用についてまとめておこう．これは岩澤類数公式を導く時に使われる ([Wa, §13.3] 参照)．

   (a) $|M/\omega_n(T)M| < \infty \Longleftrightarrow M$ は torsion Λ加群で $\mathrm{char}(M)$ は $\omega_n(T)$ と互いに素．

   (b) $\Lambda/\omega_n(T)\Lambda$ は $\mathbf{Z}_p$加群として $\mathbf{Z}_p{}^{p^n}$ に同型である．

   (c) $M = \Lambda/(p^m)$ のとき，$|M/\omega_n(T)M| = p^{mp^n}$ である．

   (d) $P(T)$ を $\omega_n(T)$ と素な distinguished polynomial とし，$M = \Lambda/(P(T))$ とするとき，十分大きな n について $|M/\omega_n(T)M| = p^{\ell n + c}$ が成立する．ここで，$\ell = \deg P(T)$ で c はある整数である．

4 岩澤類数公式

2 節で述べた，代数体の円分 $\mathbf{Z}_p$拡大について考えていこう．ここでは岩澤理論の代表的な成果である岩澤類数公式を紹介し，それがいかにして得られるかを簡単に説明する．代数体 K の円分 $\mathbf{Z}_p$拡大 K_∞ を考え，$X = \varprojlim_n A_n$ とおくと，X には $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ が作用するので X は Λ加群とみなせるのであった．

X についてもう一つ大事な事実を指摘しておきたい: L_∞ を K_∞ の最大不分岐アーベル p 拡大とする．このとき，$X \cong \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ であり，Γ の X への作用はガロア理論を通じて自然に得られる $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ への作用と一致している．この事実は類体論によって証明される ([Wa, §13.3] 参照)．個別に触れる事はしないが，類体論は各所で基本的で重要な役割を果している．

この Λ加群 X は岩澤理論の代表的な研究対象であるが，それについてわかっていることをいくつか挙げてみよう．

1. X は有限生成 torsion Λ加群である ([Wa, §13.3] 参照).

2. $\mu = \mu(X), \lambda = \lambda(X)$ を 4 節で定義した X の μ 不変量，λ 不変量とする．このとき次の岩澤類数公式が成り立つ ([Wa, Theorem 13.13]).

   定理 4.1 $|A_n| = p^{e_n}$ とおく ($n \geq 0$) と，十分大きな n について
   $$e_n = \mu p^n + \lambda n + \nu$$
   が成り立つ．ここで，ν はある整数である．

3. 岩澤類数公式に現れる μ 不変量についてはそれが 0 であるかどうかで状況が大きく違ってくる ([Wa, Proposition 13.23]).

   命題 4.2 μ に関して次が成り立つ．
   $$\begin{aligned} \mu = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X \text{は } \mathbf{Z}_p\text{加群として有限生成} \\ &\Longleftrightarrow \quad |A_n/pA_n| \text{ は } (n \to \infty \text{ のとき}) \text{ 有界である} \end{aligned}$$
   また，$\mu = 0$ であるとき，$\mathbf{Z}_p$加群としての同型
   $$X \cong \mathbf{Z}_p{}^\lambda \oplus (\text{有限アーベル } p \text{ 群})$$
   が成り立つ．

4. $K = \mathbf{Q}$ のときには，(どんな p についても) $\mu = \lambda = \nu = 0$ が成り立つ ([Wa, Corollary 10.7]).

これらの事実は3節で述べたΛ加群に関する知識と，類体論を初めとする代数的整数論の知識を組み合わせて証明される．簡単に説明しよう．類数の有限性からすべての n について $|A_n| < \infty$ であるが，このことから 1. の事実がでる．1. がわかると3節の知識を応用して 2.，3. が導ける．$\mathbf{Q}$の類数が 1 であることと $\mathbf{B}_\infty/\mathbf{Q}$ で p が完全分岐であることから 4. が示せる．ちなみに，すべての p についてすべての不変量 (λ，μ，ν) が決定されている代数体は $\mathbf{Q}$だけである．

円分 $\mathbf{Z}_p$拡大については常に $\mu = 0$ であろうと予想されている．これは一般には解決されていないが，Ferrero-Washington によってアーベル体については解かれている．つまり，

定理 4.3 K が $\mathbf{Q}$のアーベル拡大であれば，円分 $\mathbf{Z}_p$拡大 K_∞/K について $\mu = 0$ である．

が成り立つ ([Wa, Theorem 7.15])．$\mu = 0$ という予想については，次の節でも触れる．

K が CM 体の場合は重要であるので簡単に述べておきたい．K を CM 体とすると，複素共役 J はいろいろなものに自然に作用する．J の A_n への作用に関して，その固有値 1 の固有空間を A_n^+，固有値 -1 の固有空間を A_n^- とすれば $A_n = A_n^+ \oplus A_n^-$ という分解ができる (p は奇素数)．これに応じて，$X = X^+ \oplus X^-$, $\mu = \mu^+ + \mu^-$, $\lambda = \lambda^+ + \lambda^-$ と分解されることもわかる．

このとき次の定理が成り立つ．

定理 4.4 *1.* $\mu^- = 0 \Longleftrightarrow \mu = 0$ である．

2. $\mu^- = 0$ とすると，$\mathbf{Z}_p$加群として $X^- \cong \mathbf{Z}_p{}^{\lambda^-}$ が成り立つ．

K^+ を K の最大総実部分体 (つまり，J の固定体) とすると，μ^+, λ^+ は K^+ のμ不変量，λ不変量に他ならない．これについて，$\mu^+ = \lambda^+ = 0$ が成り立つだろう，というのが Greenberg 予想である．Greenberg 予想はこの研究集会の他の講演でも扱われているので，そちらを参照して頂きたい．

5 代数関数体との類似

代数体の岩澤理論を考える上では，代数体と代数関数体 (代数曲線といってもいい) との類似を意識することは有効であると考えられる．ここではその類似について解説したい．ただし，これはあくまでも類似点を想定するだけで，数学的に対応がある，というものではない．また，その類似自体も完全なものとは言い難く，他の意見もありうると思う．ここで述べることは一

つの例であると考えて頂きたい ([Wa, §7.4] を参照). また, [Iw 1] や [Iw 4] も興味深い.

F を有限体とし, C を F 上の既約で完備非特異な代数曲線とする. $K' = F(C)$ を C の F 上の関数体とする. K' は F 上の一変数代数関数体である. (C が K' のモデルであると考えても良い.) $\bar{F}$ を F の代数閉包として $K'_\infty = \bar{F}K = \bar{F}(C)$ (C の $\bar{F}$ 上の関数体) とおこう. p を F の標数と異なる素数として, $X' = T_p(\mathrm{Jac}(C))$ とおく. ただし, $\mathrm{Jac}(C)$ は C のヤコビ多様体で, $T_p(\mathrm{Jac}(C))$ はその Tate 加群である. Frob を F のフロベニウス写像とする. Frob は $\Gamma' = \mathrm{Gal}(K'_\infty/K') \cong \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の位相的生成元であり, 自然に X' に作用することに注意しよう.

この状況で次のことが知られている.

1. A'_n を C の因子類群の p^n torsion 部分群とし, L'_∞ を K'_∞ の最大不分岐アーベル p 拡大とする. このとき, $X' \cong \varprojlim_n A'_n \cong \mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ が成立し, しかもこの同型は Frob の自然な作用と compatible である.

2. g を C の種数とするとき, $\mathbf{Z}_p$加群としての同型 $X' \cong {\mathbf{Z}_p}^{2g}$ が成り立つ.

3. Frob は $X' \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ に作用するが, その特性多項式を $\mathrm{char}(X')$ とおく. ($\mathrm{char}(X')$ は 次数 $2g$ のモニックな $\mathbf{Z}_p$係数多項式である.) このとき, $\mathrm{char}(X')$ は C の F 上のゼータ関数の分子と一致している.

さて, 代数体に関しては 2 節の記号を使うこととして, 類似について説明してみよう. 代数体としては CM 体 K を取ることとする. もちろん, K' と K が対応すると考え, K'_∞ に対して円分 $\mathbf{Z}_p$拡大 K_∞ を対応させる. (K'_∞ は K' の $\mathbf{Z}_p$拡大ではなく, もっと"大きな"ものである. これも類似の不完全な点といえる.)

これが基本的設定であるが, このもとでどの様な類似があるか見ていこう. 対応するものを $\longleftrightarrow$ で表そう. ($K'_\infty/K' \longleftrightarrow K_\infty/K$ などと使う.) $L'_\infty \longleftrightarrow L_\infty$ と考えられるので, $X' \longleftrightarrow X$ と想定するのは自然であろう. さて, $\mu(X) = 0$ だとすると X' と X の $\mathbf{Z}_p$加群としての構造はかなり似ていることがわかるが, $\mu(X) > 0$ だと X は $\mathbf{Z}_p$加群として有限生成でさえなくなり, X' と X は似ているとはいえない. これが, $\mu(X) = 0$ かどうかが問題となる理由である. この類似をさらに完全にするには X の代わりに X^- を考える方が良さそうである. つまり, $X' \longleftrightarrow X^-$ と考えるのである. そうすると, $\mu^-(X) = 0$ が成り立つ (これは $\mu(X) = 0$ と同値であった) とすると X' と X^- はともに有限生成な自由 $\mathbf{Z}_p$加群となる. 両者の階数を比べて, $2g \longleftrightarrow \lambda^-$ という類似が想定できる. ここで代数関数体の種数について Riemann-Hurwitz の公式というのがあったことを思い出すと, それの代数体

での対応物は何か，という疑問がでてくる．その答はちゃんと用意されていて，λ^- に関する木田の公式というのがそれである．(木田の公式に関しては，八森・松野両氏の講演で扱われている．) Γ' の生成元である Frob の対応物としてあらかじめ定めてあった Γ の生成元 γ_0 を取ろう．(Γ の生成元としては (Frob のように) 一つ特別なものを選ぶことはできない．この点は代数関数体の場合と事情が異なっている．) Frob $\longleftrightarrow \gamma_0$ の $X' \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \longleftrightarrow X^- \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ の上への作用の特性多項式，という意味から $\mathrm{char}(X') \longleftrightarrow \mathrm{char}(X)$ という類似があることになる．さて，上に述べた様に $\mathrm{char}(X')$ は C のゼータ関数の分子に等しかった．これの類似を代数体に求めた場合,「ゼータ関数の分子」に当たるものは何か，ということが問題になる．その答が p 進 L 関数である，というのが岩澤主予想になるのだが，それを述べるために次節で p 進 L 関数について触れよう．

注: p 進 L 関数から直接得られるのはベキ級数であり多項式ではないので,「ゼータ関数の分子」とはすこしずれていることは注意しておきたい．従って，上に述べた「ゼータ関数の分子 $\longleftrightarrow p$ 進 L 関数」という類似は完全ではなく他の解釈もありうるが，一応これが通常の解釈であるといっていいと思う．

6　p 進 L 関数

ここでは p 進 L 関数について，岩澤主予想を述べるのに必要な範囲で簡単に解説しよう．詳しいことは [Wa, Chapter 5, Chapter 7] などを参照して頂きたい．

χ を導手 m のディリクレ指標とする．このとき χ に対応する (通常の) L 関数 $L(s,\chi)$ が

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}$$

で定義される．$L(s,\chi)$ は s に関して複素平面全体で有理型な関数に接続され，また，

$$L(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n} \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ．ここで，$B_{n,\chi}$ は一般ベルヌイ数というもので，$\mathbf{Q}$に χ の値を添加したした体 $\mathbf{Q}(\chi)$ に属する数である．特に，$L(1-n,\chi)$ は代数的数である．(この辺りのことは [Wa, Chapter 4] 参照．)

$L(1-n,\chi)$ は代数的数なのでこれを p 進数としてとらえることができる (p は素数)．こうして $L(1-n,\chi)$ を「p 進的に補間する」ことによって p 進 L 関数というものが考えられた (久保田 - Leopoldt)．まず，Teichmüller 指標 ω を導入しておこう．ω は導手 p のディリクレ指標で，$\omega(a) \equiv a \pmod p$ をみたすものである (ω の位数は $p-1$)．

p 進 L 関数 $L_p(s,\chi)$ は次の様に定められる ([Wa, Theorem 5.11]).

定理 6.1 任意の $n \geq 1$ に関して次式が成り立つ様な p 進解析関数 $L_p(s,\chi)$ が唯一つ存在する.

$$L_p(1-n,\chi) = (1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})L(1-n,\chi\omega^{-n})$$

χ が奇指標である (つまり, $\chi(-1)=-1$) ときには $L_p(s,\chi)$ は (恒等的に) 0 となってしまうことに注意しよう. これに対して, χ が偶指標である (つまり, $\chi(-1)=1$) ときには $L_p(s,\chi)$ は 0 ではないことがわかっている ([Wa, §5.2, p.57]).

p 進 L 関数はベキ級数を使って表示されることがわかっていて, それが岩澤理論と p 進 L 関数のつながりを与える. その結果を述べる前にすこし準備が必要である. ディリクレ指標 χ が (p に関して) 第一種であるとは, χ の導手 m が p^2 で割り切れないことをいう. これは, χ に対応する巡回拡大 $K_\chi/\mathbf{Q}$ において p が tamely ramified であること, と言い換えてもいい. ちなみに, χ が第二種であるとは, χ の位数と導手がともに p のベキになることで, これは χ に対応する拡大が 2 節で与えた $\mathbf{B}_n$ であることともいえる.

また, $\mathbf{Q}_p$ に χ の値をつけ加えて得られる体の整数環を $\mathcal{O}_\chi$ とする.

このとき次の定理が成り立つ ([Wa, Theorem 7.10]).

定理 6.2 χ は第一種の偶指標で単位指標でないものとする. このとき, ベキ級数 $f_\chi(T) \in \Lambda_{\mathcal{O}_\chi} = \mathcal{O}_\chi[[T]]$ で

$$L_p(s,\chi) = f_\chi(\kappa_0^s - 1)$$

をみたすものが存在する. ただし, κ_0 は すべての $n \geq 1$ とすべての 1 の原始 p^n 乗根 ζ_{p^n} に対して $\gamma_0 \cdot \zeta_{p^n} = \zeta_{p^n}^{\kappa_0}$ が成立するような $1+p\mathbf{Z}_p$ の元である.

χ が単位指標の場合も定理 6.2 に対応する結果はあるが, すこし変わってくる部分があるのでここでは省略した. [Wa, §7.2] などを見て頂きたい.

最後に, ベキ級数 $f_\chi(T)$ の構成に関して簡単に触れておきたい. χ を定理 6.2 にある通りとし, m を χ の導手, $\tilde{m}$ を m と p の最小公倍数とする ($\tilde{m}=m$ または mp である). $\Delta = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{\tilde{m}})/\mathbf{Q})$ とおく. $n \geq 1$ に対し, $\mathbf{B}_n$ を 1 節の通りとして $\mathrm{Gal}(\mathbf{B}_n/\mathbf{Q}) \cong \Gamma/\Gamma_n$ であったことを思い出すと, $(\mathbf{Z}/\tilde{m}\mathbf{Z})^\times \cong \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{\tilde{m}p^n})/\mathbf{Q}) = \Delta \times (\Gamma/\Gamma_n)$ が成り立っている. この同型で $a \in (\mathbf{Z}/\tilde{m}\mathbf{Z})^\times$ に対応する元を $\delta(a) \times \gamma_n(a) \in \Delta \times (\Gamma/\Gamma_n)$ と表す. χ と Teichmüller 指標 ω は Δ の指標と見られることに注意しよう.

この記号のもとで, $\xi_n(\chi)$ を次の様に定める.

$$\xi_n(\chi) = -\frac{1}{\tilde{m}p^n} \sum_{\substack{1 \leq a \leq \tilde{m}p^n \\ (a,\tilde{m})=1}} a\chi\omega^{-1}(a)\gamma_n(a)^{-1}$$

$\xi_n(\chi)$ は Γ/Γ_n の群環の元であるが，χ が単位指標でないとき係数が $\mathcal{O}_\chi$ に入ることが確かめられる ([Wa, Proposition 7.6]). つまり，$\xi_n(\chi) \in \mathcal{O}_\chi[\Gamma/\Gamma_n]$ である.

$\xi_n(\chi)$ の定義を天下り式に述べてしまったので，これだけでは $\xi_n(\chi)$ を導入する「意味」はわからないであろう．実は $\xi_n(\chi)$ は Stickelberger element と呼ばれるもので，イデアル類群と関係して重要な役割を果すことが知られている．[Wa, Chapter 6] などを参照して頂きたい.

さて，ここから岩澤理論的考察に入るのであるが，n を変化させたとき $\xi_n(\chi)$ がどう関連しているかをみていこう．$n' \geq n$ とすると群環の間の自然な写像 $\mathcal{O}_\chi[\Gamma/\Gamma_{n'}] \to \mathcal{O}_\chi[\Gamma/\Gamma_n]$ があるが，この写像によって $\xi_{n'}(\chi) \to \xi_n(\chi)$ と対応することが示せる ([Wa, Proposition 7.6])．これで，$\varprojlim_n \xi_n(\chi)$ が完備群環 $\mathcal{O}_\chi[[\Gamma]] = \varprojlim_n \mathcal{O}_\chi[\Gamma/\Gamma_n]$ の元として定まる．Γ の生成元 γ_0 が取ってあったので $\mathcal{O}_\chi[[\Gamma]] \cong \Lambda_{\mathcal{O}_\chi}$ という同型が成り立つ (1 節参照)．これによって $\varprojlim_n \xi_n(\chi)$ を $\Lambda_{\mathcal{O}_\chi}$ の元とみなしたものが $f_\chi(T)$ である．この $f_\chi(T)$ について定理 6.2 が示せるというわけである.

7　岩澤主予想

この節では，岩澤主予想について述べよう．この節については，[Wa, §13.6] を参照して頂きたい.

$K/\mathbf{Q}$ をアーベル拡大とし，$\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ とする．ここで，$K/\mathbf{Q}$ において p が tamely ramified であると仮定しておこう．この仮定から，Δ の指標 (をディリクレ指標とみなしたもの) はすべて第一種であることになる．さて，円分 $\mathbf{Z}_p$拡大 K_∞/K を考え，2 節で定義し 4 節で扱った Λ加群 $X = \varprojlim_n A_n$ を考えよう．今の状況で，X には (Γ の他に) Δ が作用している．そこで X を「Δ の作用で分解」して考えることにする．具体的には次の様にする: Δ の指標 $\chi*$ に対して，$\chi*$ の値で $\mathbf{Q}_p$ 上生成される体の整数環を $\mathcal{O}_{\chi*}$ とおく．$\mathcal{O}_{\chi*}$ は自然に $\mathbf{Z}_p[\Delta]$ 加群となり，$X_{\chi*} = X \otimes_{\mathbf{Z}_p[\Delta]} \mathcal{O}_{\chi*}$ は $\Lambda_{\mathcal{O}} = \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathcal{O}$ 加群となることがわかる ($X_{\chi*}$ を X の $\chi*$ quotient という). ここで，$\chi*$ が Δ の指標全体を動くとき，$X \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p = \oplus_{\chi*} X_{\chi*} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ が成り立ち，これが，Δ の作用で分解する，ということの意味である.

Δ の指標 $\chi*$ ごとに $X_{\chi*}$ を考察しよう．$\chi*$ が偶指標であるときは $X_{\chi*}$ は K の総実部分体の円分 $\mathbf{Z}_p$拡大から定まる加群であることがわかり，$X_{\chi*}$ は有限になると予想されている (Greenberg 予想)．岩澤主予想は $\chi*$ が奇指標である場合に関わっている (このとき K は虚アーベル体である)．$\chi*$ が奇指標とすると $\chi = \omega\chi*^{-1}$ は偶指標になる (ω は Teichmüller 指標)．このとき，$X_{\chi*}$ と p 進 L 関数 $L_p(s, \chi)$ が深く関わっている，というのが岩澤主予

想で，具体的には5節で与えたベキ級数 $f_\chi(T)$ を使って次の様に定式化できる．（ω は $\mathbf{Z}_p$に値を取るので $\mathcal{O}_{\chi*} = \mathcal{O}_\chi$ であることに注意．）

岩澤主予想 7.1 $\chi*$ は奇指標で，$\chi \neq \omega$ であるとし，$\chi = \omega\chi*^{-1}$ とおく．このとき，$\mathrm{char}(X_{\chi*})$ と $f_\chi(T)$ は $\Lambda_{\mathcal{O}_\chi}$ の中で同じイデアルを生成する: $(\mathrm{char}(X_{\chi*})) = (f_\chi(T)) \subset \Lambda_{\mathcal{O}_\chi}$

(このことは distinguished polynomial の等式として $\mathrm{char}(X_{\chi*}) = P_{f_\chi}(T)$ *と表現しても同じである(記号は命題 3.3 のもの)．)*

この予想は X という，イデアル類群から定まる「代数的な」対象と，p 進 L 関数という「解析的な」対象の関連を与えるものとして重要であるし，また，5節で述べた様な代数体と代数関数体の類似という観点からも興味深い．主予想という名前からもわかる様に，岩澤理論のハイライトといえる主張である．

上に与えた岩澤主予想は Mazur と Wiles によって保型形式を使った議論で証明された（[MW]）．また，Kolyvagin と Rubin によってオイラー系（Euler system）を使った証明も与えられた（[La, Rubin による Appendix] 参照).

ここで説明した岩澤主予想は，ディリクレ指標を考え $\mathbf{Q}$のアーベル拡大を考察の対象としている，という意味で「$\mathbf{Q}$上の理論」である．これを一般化して,「総実体上の理論」を考えることができる．その場合の岩澤主予想は Wiles によって解決されている（[Wi]）.

以上で代数体の岩澤理論の簡単な紹介を終わることにする．初めにも書いた様に，代数体の岩澤理論に限ってもここで扱った加群 X 以外にも多くの重要な対象がある．また，最近は楕円曲線や保型形式に対する岩澤理論の一般化も盛んに研究されている (その様な対象に関しては岩澤主予想 (の一般化) はいまだに「予想」のままで解決されていない)．それを思えば，本稿で解説したことは岩澤理論のごく一部でしかないのであるが,「入門」としての役割がすこしでも果たせれば幸いである．

参考文献

[Ichi] 市村文男，岩澤理論入門，東京都立大学セミナー報告，1996.

[Iw 1] 岩澤健吉，代数体と函数体とのある類似について，数学 15(1963) 65-67.

[Iw 2] K. Iwasawa, On $\mathbf{Z}_\ell$ extensions of algebraic number fields, Ann. Math. 98(1973) 246-326.

[Iw 3] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, Ann. Math. Studies 74, Princeton University Press, 1972.

[Iw 4] (「数学」編集部)，岩澤先生のお話を伺った 120分，数学 45(1993) 366-372.

[La] S. Lang, Cyclotomic fields I and II, GTM 121 , Springer Verlag, 1990.
[MW] B. Mazur and A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, Invent. math. 76(1984) 179-330.
[Wa] L.C. Washington, Introduction to cyclotomic fields, 2nd ed., GTM 83, Springer Verlag, 1997.
[Wi] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. Math. 131(1990) 493-540.